ダイナミックスピーカーを利用した棒振動実験

An experiment of the rod vibration by using an electrodynamic loudspeaker

(平成16年9月受理)

鈴木三男* (SUZUKI Mitsuo)
根本信行* (NEMOTO Nobuyuki)
増田健二** (MASUDA Kenji)

Abstract

The lower grade students learn the basis of the vibration and wave motion in the physics. Most of them are interested in resonance phenomena, such as vibrations of strings and diapasons. If the rod vibration experiment is demonstrated in front of them, this has the possibility to make them have an interest in the professional field. The upper grade students learn solid elasticity in the applied physics and the professional subject. If the theory of this experiment is understood by them, this has the possibility to be incorporated into the student's experiments. We try a series of experiments to inspect these possibilities and present the result.

1. はじめに

本校では、波動・振動の基礎を低学年で学ばせている。中でも共鳴・共振は、学生の興味を引き物理現象であり、音叉による気柱の共鳴実験や、弦の定常波の観察などを授業で実施している。しかし、共鳴実験や弦の定常波の実験とは異なり、この棒振動では単純な倍振動での共振は起こらない。したがって低学年の学生にとっては、「何故倍振動で共振しないのか」という疑問を抱かせるディモンストレーション実験教材とし活用でき、さらに高度な知識を必要とする専門分野への動機付けを与える教材と考える。

また、高学年・専攻科の学生は、低学年の物理的基礎の上に、固体の弾性・応力について、応用物理や専門分野の授業の中で学んでいる。したがって、この棒振動は現象としてだけでなく、理論的にも理解できることから、実用教材としても利用可能と思われる。

従来、3年生の応用物理学実験では、固体のヤング率を測定する方法として、試料に加熱を加えて変形を測定するEwingやSearleの方法を行っている。この棒振動は、試料を振動させ、その共振周波数を測定する方法（振動リード法）①である。今回はダイナミックスピーカーを改良して振動源にし、棒の振動を半導体位置検出素子（PSD）②,③とオシロスコープを用いて測定した。この測定結果を踏まえ、低学年用デモンストレーション実験教材、高学年用実験教材としての導入の可能性を検討した。

2. 原理

今回の棒振動実験の原理を次に示す。①②③

Fig1 ヤング率と応力

Fig1のように、長さl、断面積Sの棒の両端に張力F(N)加えたところ、△l(a)だけ伸びたとき、応力F/Sとひずみ△l/lの関係には

\[ F = E \Delta l / l \quad \text{(1)} \]

の関係が成り立つ。ただし、Eはヤング率である。

Fig2 棒の曲げ

* 福島工業高等専門学校 一般教科物理（いわき市平荒川字長尾30）
** 静岡大学工学部共通講座 （浜松市城北3-5-1）
次に Fig2-(a)のように、一様な棒を曲げた場合を考える。Fig2 中 A は任意の断面、NN’は曲げによって中立面、R は中立面における曲率半径である。Fig2-(b)のように断面 A で、中立面 NN’との交線を ニ軸にそれぞれ垂直に Z 軸を定める。中立面 NN’よりも上層（ζ > 0）では張力を、下層（ζ < 0）では圧力を受けてい る。

断面 A で中立面 NN’より離れた面 ds でのひずみは、

\[
\frac{(R + \zeta)\theta - R\dot{\theta}}{R} = \frac{\zeta}{R} \\
\]

であるから、(1)式から ds に働く張力 \( f_c \) となる。したがって断面 A での曲げモーメント \( M \) は、

\[
M = \int \frac{E \sigma_z \zeta}{R} ds = \int \frac{E \sigma_z \zeta}{R} ds = E I \cdot I = \int \sigma_z \zeta ds \\
\]

となる。ただし、I は断面 2 次モーメントである。また、x におけるたわみを \( y \) とすると、数学的に

\[
\frac{1}{R} = \frac{d^2 y}{dx^2} \left( \frac{d y}{dx} \right)^2 \equiv \frac{d^2 y}{dx^2} \\
\]

と表されるので、曲げモーメント \( M \) は次式となる。

\[
M = \frac{E I}{R} - \int \frac{d^2 y}{dx^2} \left( \frac{d y}{dx} \right)^2 dx \\
\]

棒の断面内では、曲げモーメントに比例する応力 \( Q \) が作用している。Fig3 のように、断面 A から ds 離れた断面 B で開まれた微小部分でのモーメントの平衡から

\[
M + Q ds = M + \frac{d M}{dx} ds \Rightarrow Q = \frac{d M}{dx} \\
\]

が成り立ち。微小部分が y 方向に運動したときの運動方程式は、

\[
\rho S dx \frac{\sigma_y}{\partial t^2} = Q + d Q - d Q = \frac{d}{dx} \left( \frac{d M}{dx} \right) \\
\]

となる。\( \rho \) は棒の密度、S は断面積である。(2)式より

\[
\frac{\sigma_y}{\partial t^2} \left( \frac{EI \sigma_y}{\partial t^2} \right) + \rho S \frac{\sigma_y}{\partial t^2} = 0 \\
\]

と変形させる。一様な棒であるなら、\( EI \) は定数となり、

\[
\rho S \frac{\sigma_y}{\partial t^2} + \rho S \frac{\sigma_y}{\partial t^2} = 0 \ldots \ldots \ldots (4) \\
\]

が得られる。(4)式が棒振動の基本方程式となる。解を \( x \) の関数 \( r \) の関数の形に変数分離して

\[
y(x,t) = X(x)U(t) \\
\]

Fig3 曲げモーメントと応力

Fig4 振動モード

と仮定し、(4)式に代入する。

\[
\frac{EI \sigma_y}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho X} \frac{d^2 U}{dt^2} = \omega^2 \\
\]

ここで、実験条件に対応した境界条件（端固定、端自由）を(5)式に適応すると

\[
1 + \cosh \lambda \cos \lambda = 0 \ldots \ldots (7) \\
\]

を満足しなければならない。ただし、\( \lambda \) は棒の長さ。

(7)式の解は、

- 1 次振動：\( \lambda_1 = 1.875 = \alpha_1 \)
- 2 次振動：\( \lambda_2 = 4.694 = \alpha_2 \)
- 3 次振動：\( \lambda_3 = 7.855 = \alpha_3 \) \\

となり、2 次、3 次振動は、1 次振動の整数倍になる。

Fig4 には、この条件での 1 次～3 次振動までの共振状態を示すが、一端が節、他端が節の定常波がでている。上記関係を(6)式に代入することで、次のヤング率 \( E \) と n 次振動の周波数 \( f_n \) の関係が得られる。

\[
f_n = \sqrt{\frac{\alpha_n^2}{2\alpha_n}} \left( \frac{E I}{\rho S} \right) \ldots \ldots (8) \\
\]

3. 実験
3-1. 方法

Fig5 に装置の概要を示す。装置は試料棒を振動させする駆動部と振動の状態を確認する検出部からなる。

駆動部には、ダイナミックスピーカー（周波数 150 Hz）を振動源として利用した。スピーカーのコーン部分にアルミ板（145 φ）を接着し、このアルミ板の中心には、試料固定用ボルト（φ 6, 100 mm）を取り付けた。
また固定ボルトには、金属棒と金属薄板兼用で使用できるように工夫した。任意の周波数の正弦波が、低周波発振器（YHP 3510B）からアンプ（Nakamura SA-150N）を通じてスピーカーに送られ、その周波数で試料棒を左右に振動させた。

検出部には、半導体位置検出素子（PSD）とオシロスコープ（KIKUSUI COM7101A）を利用した。まず試料棒の物理定数に影響を与えないように、軽いスリットを付いた軽い紙（紙 25mm×70mm、スリット 0.5mm×12mm）を試料棒に貼り付けた。この紙は、余分な光を遮光し、スリットを通った光だけを PSD に入れる働きをする。棒の動きと連動して、スリット通過光が PSD 上を動く。PSD は通過光の位置を電圧に変換するので、その電圧変化をオシロスコープ上で確認した。また、必要に応じて、PSD の出力を AD コンバーターを使って、コンピュータに取り込み、棒振動の解析を行った。

測定は、まず、低学年用デモンストレーション用として、長さ 800mm～600mm の試料棒を使用し、1 次から高次の振動の様子を調べた。次に高学年用実験用としては、長さの異なる同材質の試料棒を準備し、1 次振動の共振周波数から、ヤング率 E を求めた。

3-2. 共振曲線

アルミ棒（2φ、796mm）試料棒に駆動部から振動を加えた時に、第 1 次振動で測定された代表的な振動波形を Fig6 に示す。Fig6 に示す振動波形は、共振周波数（f_1=2.32Hz）の場合を、また Fig7 には共振周波数からわずかにずれた時を示す。Fig6 より共振周波数では、試料棒は徐々に振幅を増大し、一定の振幅で単振動を行う。共振周波数からずれると、「うなり（ビート）」が生じた。以後共振周波数の判定には、波数の増大と「うなり」の有無を利用する事とした。

Fig8 には、共振周波数の前後の、振幅の peak−peak（最大値−最小値）の変化を示す（共振曲線）。図からも、共振時には 5 倍以上の振幅の増大が認められ、周波数の判定での困難さは特に感じられない。その故、「誰でもが測定可能である」という学生実験の必要条件はクリアされた。

3-3. 高次振動

Fig9 に試料棒にアルミ棒（2φ、796mm）を使用した時の 1 次、2 次、3 次振動の様子を示す。それぞれの共振周波数を測定した結果、f_2=2.32Hz、f_3=13.6Hz、f_3=39.3Hz であった。（8）式より、理論的には

\[ f_1 : f_2 : f_3 = a_1 : a_2 : a_3 = 1 : 6.27 : 17.6 \]

なり、1 次振動の整数倍にはならない。測定した共振周波数についても、

\[ f_1 : f_2 : f_3 = 1.586 : 16.9 \]
表1 共振周波数とヤング率

<table>
<thead>
<tr>
<th>共振周波数</th>
<th>ヤング率E（×10^19）</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1次振動</td>
<td>2.32</td>
</tr>
<tr>
<td>2次振動</td>
<td>13.6</td>
</tr>
<tr>
<td>3次振動</td>
<td>39.3</td>
</tr>
</tbody>
</table>

とり1次振動の数値倍にはなっていないものの、測定値は2次、3次とも理論値よりも若干小さな値になった。

また振動の様子に着目すると、一端が節、他端が腹の定常波を観察され、Fig4に示した振動モードと良い一致が見られた。3次振動では、定常波の腹と節が等間隔に並ぶ弦の振動とは異なり、節一節間隔が異なる特徴的な振動が観察された。この様子を学生の前で実演もしくは、ビデオ画像としてスロー再生できれば、学生は棒振動では共振が単純に倍振動で起こらないことを十分体感できる。したがって、「何故倍振動で共振しないのか、弦の振動とは何か違う」という疑問を抱かせるデモンストレーション実験教材として十分に活用できる。

最後に(8)式に代入してそれぞれのヤング率Eを求めた結果を表1に示す。アルミニウムのヤング率Eは7.03×10^11Paであるから、2次振動の場合が、最も誤差が大きく問題を感じが、1次・3次振動からの値は、比較的近い値が得られた。スピーカーの性能及び上の結果を踏まえ、実験的にヤング率Eを算出する次の測定では、1次振動の共振周波数を利用した。

3-3. 1次振動によるヤング率

試料棒として長さ800mmから400mmまで、約100mm離して、直径20mm、直径1.6φを5本準備した。各長さの試料棒について、1次振動の共振周波数を測定した。測定に際しては、3-2. 共振曲線のところで述べたように、振幅が増大し、「うなり」消えることを基準にして、共振周波数を求めた。試料棒の長さと共振周波数の関係結果をFig10,11に示す。Fig10,11では振幅に周波数と振幅には長さの2乗の1（1/2）をとり、各測定値の点をつかった。Fig10,11で各測定値はほぼ一直線上にあり、図の直線は、EXCEL 製の近似曲線一線形近似（最小2乗法）により求めた。(8)式より、この直線の傾きaとヤング率Eとの関には、

\[ a^2 = \frac{\alpha^4 EI}{4\pi^2 pS} \]

（ただし\( \alpha = 1.875 \ldots \ldots (9) \)

の関係がある。物理定数I, Sおよびρは、試料棒によって定まるもので、直線の傾きaによって、ヤング率Eが求まる。

Fig10 長さと共振周波数の関係（A1）

Fig11 長さと共振周波数の関係（Fe）

(9)式からアルミニウムのヤング率Eは6.94×10^11Pa, また鉄のヤング率Eは18.5×10^11Paとなり、まずまずの値が得られた。物理定数表などの値との差異を考えると、現在学生実験で実施しているEwing法によるヤング率の測定結果（異なる材質である）でも大差はない。工夫と改善の必要性あるもの、この棒振動実験を学生実験に組み入れることは、十分に可能であると思われる。

4. まとめ

理論的には応力や弾性との知識を必要とする実験であるが、明瞭な共振状態を観察することが出来、その観察から、共振周波数が倍振動になっておらず、また弦の定常波とも微妙に違う事が認められた。「何故この様な振動が起こるのか？」という疑問を抱かせるデモンストレーション実験教材として十分に活用でき、更なる専門知識への学習意欲を燃や立てての動機付けることになり得る。

また、振動リード法によるヤング率の値は、Ewing法によるヤング率の測定結果とも大差はなく、学生実験への導入も十分可能である。しかし導入に際しては、実際の測定から、幾つかの点に留意する必要がある。

振動源として利用したダイナミックスピーカーは、その特性から低周波（<200Hz）領域向きであり、それ
以上の周波数帯ではスピーカーから発生する音が、他の実験の邪魔になる。(8)式から、試料棒の長さ l が短い程、共振周波数は高くなり、このスピーカー音の問題が生じてくる。試料棒の長さはヤング率 E に対して、4乗のオーダーで関わっているので、長さの精度がヤング率 E に大きな影響を与える。相対誤差からすれば、長さが短くなる程、その影響は大きくなる。それ故、試料棒の長さについては、これらの 2 点を十分に考慮する必要があった。結果的に今回は 800mm から 400mm の試料棒を使用したが、他の試料を使用する場合にも同様に考慮しなければならない。

また、実験スペースの関係から、振動源をもう少しコンパクトに軽量小型化して、使用し易い形に工夫するとともに、またもう少し低価格の機器で、PSD からの出力波形を観測できるようにして、学生実験への導入に取り組みたい。

5. おわりに

振動源スピーカーの作成に際し、アルミ板、試料固定用ボルトの加工を快く引き受けて頂いた、機械工学科長渡辺光仁さんに感謝いたします。

参考文献
1) 平田三, 平川浩正, 兵藤申一, 中川広昭, 田幸敏治, 基礎物理学実験, pp66−74, 茜華房, 1966.
2) 鈴木三男, 根本信行, 増田健二, 半導体位置検出素子を用いた振動実験の教材化, 福島高等専門学校紀要, 第 33 号, pp29−35, 1996.
3) 増田健二, 鈴木三男, 半導体検出素子 (PSD) による振動実験の教材化, 応用物理教育, 第 21 卷 2 号, pp3−8, 1997.